Pays : Burkina Faso	**Année :** 2015	**Session :** normale, 1er Tour
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

Exercice 1

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 - 3z + 2i - 1$, $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que le polynôme P(z) admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.

2. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm),

on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; $2 + i$ et -1.

a) Placer les points A, B et C.

b) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Calculer l'affixe de D.

c) Calculer le nombre complexe $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}$.
Déterminer le module et un argument de Z. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

A(−2 ; −1 ; 2), B(6 ; −5 ; 3), C(−1 ; 3 ; 10) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. *a*) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Interpréter géométriquement ces résultats.

c) Calculer les distances AB et AC.

d) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

2. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Montrer que $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 9\left\|\vec{u}\right\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en

fonction de la norme de $\vec{u}$.

4. Soit D(1 ; 1 ; 1) un point de l'espace.

a) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

b) Calculer d(D, (ABC)) et en déduire le volume $\mathcal{V}$, en unité de volume, de
la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC.

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

1. Étudier les variations de g.

2. Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout x non nul, on a : $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}+2 \text{ si } x\neq 0,$$

$$f(0)=3.$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

1. *a*) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que $\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que ($\mathscr{C}$) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = - x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

3. Calculer, pour tout x non nul, $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

4. *a*) Donner le sens de variations de f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5. Soit (T) la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse nulle. Écrire une équation de (T).

6. Tracer (D), (T) et ($\mathscr{C}$).

Partie C

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha\in]2 ; 2 ;5[$.

2. On pose : $\text{I} = [2 ; 2{,}5]$.

a) Démontrer que pour tout x de I, on a : $g(x) \geq -20$ et $e^x - 1 \geq 40$.

b) En déduire que si $x\in\text{I}$, $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$.

3. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n\in\text{I}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|U_n-\alpha\right|$ et $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) En déduire que (U_n) convergence vers α.

d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\left|U_n-\alpha\right|\leq 10^{-3}$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\ln 10 \approx 2{,}3$; $e^2 \approx 7{,}39$; $e^{2,5} \approx 12{,}18$; $\frac{1}{e^2-1} \approx 0{,}15$;

$\frac{1}{e^{2,5}-1} \approx 0{,}09$; $(e^2-1)^2 \approx 40{,}83$; $(e^{2,5}-1)^2 \approx 125$.