UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2021
Session Normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

On considère le nombre complexe u défini par :

$$u = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i).$$

1) Montrer que $u = 1 - i$. (0,5 point)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'inconnues z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 + i \\ \frac{1}{2}z_1 + (1-i)z_2 = 2 - 5i \end{cases}. \text{ (0,5 point)}$$

3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$.

On considère l'application f définie de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{iz - 3i - 1}{z + 2i}$

a) Soit C le point d'affixe u. Calculer l'affixe u' de C', image de C par f. (0,25 point)

b) Montrer que $z' = \dfrac{i(z - 3 + i)}{z + 2i}$. (0,25 point)

c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'. (1 point)

d) Déduire de la question 3) c) les ensembles des points suivants :

*l'ensemble (Γ_1) tel que $z' \in \mathbb{R}^*$. (0,5 point)

*l'ensemble (Γ_2) tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$. (0,5 point)

*l'ensemble (Γ_3) tel que $|z'| = 1$. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Un revendeur de billets de loterie dispose de dix billets dont trois sont gagnants. Une personne achète cinq billets. On supposera que tous les choix sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité pour qu'il y ait parmi les cinq billets achetés :

a) un seul billet gagnant. (0,5 point)

b) au moins un billet gagnant. (0,5 point)

2) Parmi les trois billets gagnants, un gagne 50 francs et deux gagnent 25 francs chacun.

Soit X la variable aléatoire égale au gain réalisé.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? (1 point)

b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1,25 point)

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. (0,75 point)

Problème (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x + 1 - e^x$.

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x)$. (0,5 point)

2) a) Etudier le sens de variation de h, puis dresser son tableau de variation. (1,5 point)

b) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5 point)

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (0,5 point)

b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. (1 point)

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b). (1 point)

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,5 point)

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. (1,5 point)

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle. (0,5 point)

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 3x = 3xe^{-x} \times h(x)$. (0,5 point)

c) Déduire les positions relatives de (C) et (T). (0,5 point)

4) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente (T) et la courbe (C). (1 point)
(On prendra $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -1,3$; $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 2,5$.)

Partie C

1) Soit la fonction F définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b et c sont des nombres réels.
Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (1,25 point)

2) Soit α un réel strictement positif. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. (0,75 point)

3) Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$. (0,5 point)

On donne : $\sqrt{5} \simeq 2,2$

Fin