UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Séries C-E

Année 2021
Session Normale
Epreuve du 1^{er} tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{-i\ ;\ i\}$ et f l'application telle que : $\forall z \in \mathbb{C}_1,\ f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}_1$ l'équation $f(z) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (0,75 point)

2) a) Montrer que : $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1\ ;\ f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z'$ ou $zz' = 1$. (0,5 point)

b) Soit $(z,\ z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$.

Montrer que si $f(z) = f(z')$ alors $z = z'$. (0,5 point)

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit un réel. (0,75 point)

4) Dans cette question, $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi[\setminus \left\{\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}$.

a) Montrer que $f(z)$ est réel et le calculer en fonction de $\cos\theta$. (0,5 point)

b) Soit (u_n) la suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + ... + (f(z))^n$.

Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle ? (1 point)

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté de longueur a.

On note I le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;-2)$.

1) Déterminer et construire I. (0,5 point)

2) Calculer IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a. (0,75 point)

3) Soit k un nombre réel.

a) Déterminer en fonction de k l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$. (0,5 point)

b) Existe-t-il une valeur de k pour laquelle $B \in (\Omega_k)$? (0,25 point)

4) a) Démontrer que (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droite (AB). (0,5 point)

b) Montrer que le symétrique D du point B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC). (0,5 point)

c) Démontrer que (Ω_{-1}) est tangent à la droite (AC) en D. (0,5 point)

d) Quelle est la nature exacte du triangle BID ? Justifier. (0,5 point)

Problème (12 points)

Soit la fonction $f_a : x \mapsto \ln(|x| + a)$, $a \in \mathbb{R}$, et (C_a) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : (07,5 points)

1) Déterminer l'ensemble de définition D_a de f_a suivant les valeurs de a. (0,75 point)

2) Etudier la dérivabilité de f_a en 0 pour $a > 0$; Interpréter le résultat obtenu. (1 point)

3) Etudier le sens de variation de f_a suivant les valeurs de a puis dresser les tableaux de variation de f_a. (3 points)

4) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan.
Montrer que : si $M(x, y) \in (C_a)$ alors pour tout $a' \neq a$, $M(x, y) \notin (C_{a'})$ (0,25 point).

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f_a(x) - f_{a'}(x))$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f_a(x) - f_{a'}(x))$. (0,5 point)

c) Interpréter les résultats obtenus. (0,25 point)

5) Construire (C_2) ; $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_{-1}). On représentera les asymptotes et les demi-tangentes pour les courbes qui en ont. (1,75 point)

Partie B : (03,25 points)

1) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall a > 0$, $|f'_a(x)| < \dfrac{1}{a}$. (0,25 point)

2) a) Montrer que sur $]0; +\infty[$, l'équation $f_2(x) = x$ admet une unique solution α. (0,5 point)

b) Montrer que $1 \leq \alpha \leq 2$. (0,5 point)

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(2 + u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$. (0,5 point)

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. (1 point)

c) A partir de quelle valeur n_0 de n, u_n est une valeur approché à 10^{-5} près de α ? (0,5 point)

Partie C : (1,25 point)

On suppose que $a > 1$.

Soit H la partie du plan délimitée par (C_a), $(D) : y = x + a$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

On note $A(a)$ l'aire de H.

1) Calculer $A(a)$ en fonction de a. (0,75 point)

2) Déterminer $A(\frac{e^2}{4})$. (0,5 point)

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 10 \simeq 2,3$

Fin