UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Séries C-E

Année 2021
Session Normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice I (4 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $mes\,(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ et $AB = 2CB = 2a$, a un réel strictement positif.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S de centre A et qui transforme D en B. (1 point)

2) Soit I un point du segment $[DC]$, on pose $J = S(I)$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. (1 point)

3) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $h = Sor^{-1}$ avec h une transformation du plan, M le milieu du segment $[AB]$.

a) Déterminer $h(A)$ et $h(M)$ et caractériser h. (0,75 point)

b) On pose $K = r(I)$. Montrer que $AK = \frac{1}{2}AJ$. (0,5 point)

4) On note B' l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (AJ).
Montrer que $B'J = 2DI$. (0,75 point)

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient trois (3) pièces de monnaie possédant chacune une face "PILE" et une face "FACE", toutes indiscernables au toucher. Deux (2) des pièces sont bien équilibrées et une est truquée. La pièce truquée a une probabilité d'apparition de "FACE" égale α fois celle de "PILE". α est un réel strictement positif.

On prend au hasard une pièce de l'urne et on effectue des lancers successifs de cette pièce.
On considère les événements suivants :

B "la pièce prise est normale"
$\overline{B}$ "la pièce prise est truquée"
A "Obtenir $\ll PILE \gg$"
F_n "Obtenir $\ll FACE \gg$ pour les n premiers lancers".

1) a) Déterminer la probabilité d'apparition de $\ll PILE \gg$ pour la pièce truquée en fonction de α. (0,5 point)

b) Calculer la probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ puis en déduire celle de A. (0,5 point)

c) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle A est un événement certain? un événement impossible ? (0,5 point)

2) En remarquant que $F_n = (F_n \cap B) \cup (F_n \cap \overline{B})$, calculer la probabilité $P(F_n)$ de l'évènement F_n. (0,5 point)

3) a) Sachant que l'on obtient $\ll FACE \gg$ lors des n premiers lancers, quelle est la probabilité P_n d'avoir pris la pièce truquée ? (1 point)

b) Pour quelles valeurs de α la limite de P_n est-elle non nulle ? (0,5 point)

c) Calculer alors cette limite pour $\alpha = 3$. (0,5 point)

Problème (12 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 4 cm.

Partie A (7,5 points)

1) a) Montrer que f_n est continue en 0. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0. (On distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$). (0,5 point)

Interpréter graphiquement les résultats. (0,5 point)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. (0,5)

2) a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. (1 point)

b) En déduire la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) et montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois (3) points fixes dont on précisera les coordonnées. (0,75 point)

3) a) Etudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation. (On distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$). (1,5 point)

b) Pour tout entier n, non nul, déterminer en fonction de n, une équation de la tangente à (C_n) en chacun des points d'abscisse 1 et d'abscisse e. (0,5 point)

c) Construire dans un même repère les courbes (C_1) et (C_2). (1 point)

4) a) Soit a un réel strictement positif et différent de e. On considère les deux points $M \in (C_n)$ et $M' \in (C_{n+1})$ de même abscisse a. On trace : la droite (OM') ; la droite (D) passant par M et parallèle à l'axe des abscisses et la droite (Δ) d'équation $x = 1$.

Montrer que ces trois (3) droites sont concourantes. (0,5 point)

b) Expliquer alors comment construire le point M' à partir du point M. (0,25 point)

Partie B (1,5 point)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_1^e f_n(t)dt$.

1) Sans calculer I_n, étudier le sens de variation de (I_n). (0,5 point)

2) a) En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de n l'expression I_n de la suite (I_n) en fonction de n. (0,5 point)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 point)

Partie C (3 points)

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égale à 2.

1) On désigne par x_n le réel non nul tel que $f'_n(x_n) = 0$ (où f'_n désigne la dérivée de f_n)

a) Montrer que $x_n \in]1, e[$. (0,5 point)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. (0,5 point)

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[x_n, e[$. On note α_n cette solution. (1 point)

b) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) > 1$. (0,5 point)

c) En déduire que la suite (α_n) est croissante. (0,25 point)

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$. (0,25 point)

On donne $e^{\frac{1}{2}} = 1,6$; $e \simeq 2,7$.

Fin