UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 18 Bis A 01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

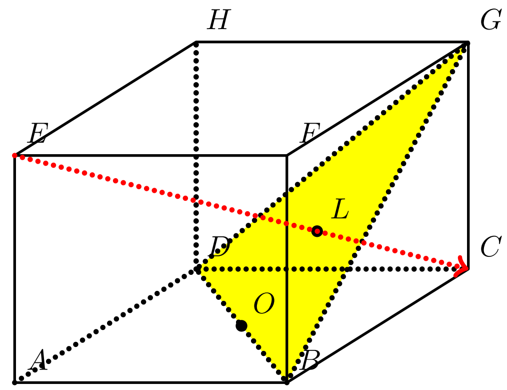
$ABCEDFGH$ est un cube d'arête 1. On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$. 0.5 *pt*

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGD). 0.5 *pt*

c. Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD). 0.5 *pt*

2. Donner une équation de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD). 0.5 *pt*



3. A tout α appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on associe le point M de coordonnées $(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$.
a. Montrer que M est un point du segment $[EC]$. 0.5 *pt*
b. Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$. 0.75 *pt*
c. Déterminer α pour que la distance de M à la droite (BD) soit minimale. 0.25 *pt*
Soit L le point associé à cette valeur de α.
d. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD. 0.25 *pt*

4. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $k \in [0, 1]$.
a. Donner l'expression analytique de h. 0.5 *pt*
b. Vérifier que $h(C) = M$. 0.25 *pt*
c. Déterminer une équation de (S') image de (S) par h. 0.5 *pt*

Exercice 2 (4 *points*).

Soit a un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \text{pgcd}(n, a)$.

1. a. Pour $a = 15$, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n). 3×0.25 *pt*
b. Pour $a = 4$, soient m et n des entiers naturels tels que $u_m = u_n = 2$.

Montrer que $u_{m+n} = 4$. 0.75 *pt*

2. a. Soit b un entier naturel.
Démontrer que pour tout entier relatif q on a : $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(a, b - qa)$.
0.75 *pt*

b. Calculer u_0 et u_a. 2×0.25 *pt*

c. Démontrer que $u_{n+a} = u_n$.
Quelle propriété de la suite (u_n) a-t-on mise en évidence ? $0.5 + 0.25$ *pt*

3. Pour $a = 15$, calculer u_n avec $n = 15^{21} + 2$. 0.5 *pt*

PROBLEME (11 *points*).

Le plan orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique 4 *cm*).

n étant un entier naturel non nul, on s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x :

$$(E_n) : x + \mathrm{e}^x - n = 0$$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^x - n.$$

On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

Partie A

1. a. Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $\ln x - x < 0$. 0.5 *pt*

b. Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $\left]\ln\dfrac{n}{2},\ \ln n\right]$. $0.5 + 0.5$ *pt*

c. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_n}{\ln n}$. 3×0.25 *pt*

d. Calculer u_1. 0.25 *pt*

2. Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \mathrm{e}^x - n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = n - x$$

a. Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_{n+1}}}{\mathrm{e}^{u_n}}$. Montrer alors que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. $0.5 + 0.25$ *pt*

b. A l'aide des variations de l'application f_n, étudier celles de la suite (u_n). 0.75 *pt*

c. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}, x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n}. Montrer que :

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1}^2 - u_n^2\right) - (n+1)\left(u_{n+1} - u_n\right) + 1.$$

Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n, on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$. En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{A}_n$. $0.75 + 2 \times 0.25$ *pt*

3. a. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifier qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait :

$$\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \mapsto 0} \varepsilon(h) = 0.$$

0.5 *pt*

b. On pose $\alpha_n = \dfrac{u_n}{\ln n} - 1$ c'est à dire $u_n = \ln n + \alpha_n \ln n$.
Quelle est la limite de (α_n)? 0.25 *pt*

c. Déterminer une suite (y_n) telle que $u_n = \ln n + \ln(1 + y_n)$

Déduire alors de la question (3 a.) qu'il existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \beta_n \frac{\ln n}{n}.$$

$0.5 + 0.5$ *pt*

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2.

D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle $[0, \ln 2]$.

On note g l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1],\ g(x) = \ln(2-x)$ et on pose $b = \dfrac{2}{3}\ln 2$ et $a = g(b)$.

1. a. Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a, b]$.
$0.5 + 0.5$ *pt*

b. Prouver que g est dérivable sur I et $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g'(b)|$.
Enoncer clairement le théorème qui permet d'en déduire que

$$\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)|\ |x - y|.$$

$0.5 + 0.25$ *pt*

c. Vérifier que $g(I) \subset I$. 0.5 *pt*

2. On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = g(a_n)$.

a. Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est à dire démontrer que pour tout entier naturel n, a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et que pour tout entier naturel n, a_n appartient à I. 0.25 *pt*

b. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n (b-a)$
En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite. $0.5 + 0.25$ *pt*

c. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que a_n soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?
0.5 *pt*

3. Représenter sur un même graphique, les restrictions de g et f_2 à l'intervalle $[0,1]$, le domaine $\mathcal{A}_2$, la droite d'équation $y = x$ les points de coordonnées respectives $(a, 0), (b, 0), (u_2, 0), (u_3, 0)$.
0.5 *pt*