MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 **(04,5 points)**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E) : z^2 - 2(1 + i\sqrt{2})z + 2(-1 + 2i\sqrt{2}) = 0$.

a) Ecrire $(\sqrt{2} - i)^2$ sous forme algébrique. **(0,25 point)**

$$(\sqrt{2} - i)^2 = 1 - 2i\sqrt{2}$$

b) Résoudre (E). **(1 point)**

$$\Delta' = \left(1 + i\sqrt{2}\right)^2 - 2(-1 + 2i\sqrt{2})$$
$$= 1 - 2i\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2} - i)^2$$
$$\boldsymbol{S} = \{(1 + \sqrt{2}) - i(1 - \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}) + i(1 + \sqrt{2})\}$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = (1 + \sqrt{2}) - i(1 - \sqrt{2})$, $z_B = 2 + 2i\sqrt{2}$ et $z_C = (1 - \sqrt{2}) + i(1 + \sqrt{2})$.

a) Placer les points A, B et C. **(0,5 point)**

Les placer

b) Vérifier qu'on a : $z_C = iz_A$, puis en déduire la nature exacte du triangle OAC. **(0,25+0,5 point)**

$$iz_A = i\left((1 + \sqrt{2}) - i(1 - \sqrt{2})\right) = (1 - \sqrt{2}) + i(1 + \sqrt{2}) = z_C$$

On a : $\frac{z_C}{z_A} = i$. On en déduit que $OC = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

Le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

3. a) Donner une écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$. **(0,5 point)**

$$Z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) Déterminer alors la nature exacte du triangle ABC. **(0,5 point)**

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

4. Montrer que les points A, B, C et O appartiennent à un même cercle dont on précisera son centre et son rayon. **(01 point)**

Le cercle circonscrit au triangle rectangle OAC a pour centre le milieu I de son hypoténuse $[AC]$ et pour rayon $\frac{AC}{2}$.

Le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC a pour centre le milieu I de son hypoténuse $[AC]$ et pour rayon $\frac{AC}{2}$.

Les deux triangles ont donc le même cercle circonscrit. Les points A, B, C et O appartiennent donc au cercle de centre I, milieu de $[AC]$ et de rayon $\frac{AC}{2}$.

EXERCICE 2 **(05,5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(1,2,3), B(0,1,4), C(-1,-3,2), D(4,-2,5)$ et le vecteur $\vec{n}(-2,1,-1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan. **(0,5 point)**

On a : $\overrightarrow{AB}(-1,-1{,}1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,-5,-1)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Par conséquent, ils déterminent un plan (P).

2. a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). **(0,5 point)**

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; il est donc normal au plan (P)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **(0,5 point)**

$$(P) : -2x + y - z + 3 = 0$$

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC). **(0,5 point)**

$$(D) : \begin{cases} x = -2\,k \\ y = k \\ z = -k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

3. a) Justifier que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre. **(0,5 point)**

Le point D n'appartient pas au plan (P), donc les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre.

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). **(0,5 point)**

$$d(D,P) = \frac{|-2 \times 4 + (-2) - 5 + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. **(0,5 point)**

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| \times d(D,P)$$

4. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\,k \\ y = -1 + k, \\ z = 4 - k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC). **(0,5 + 0,5 point)**

Le point D est obtenu pour $k = -1$

La droite (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{n}(-2,1,-1)$; elle est donc perpendiculaire au plan (ABC).

5. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC. **(01 point)**

Le point E est le point de paramètre $k = -\frac{1}{2}$ sur (Δ). $E(0, 0{,}3)$

On a : $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$; donc le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

PROBLEME (10 points)

PARTIE A (02,75 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + xe^{-x}$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ · **(0,5 point)**

$\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 2$.

2. Etudier les variations de g. On dressera le tableau de variations. **(1 point)**

$$g'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

- Sur $]-\infty, 1[$ g est strictement croissante ;

- Sur $]1,+\infty[$ g est strictement décroissante

3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera α. **(0,5 point)**

- Sur $]-\infty,1[$ g est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,1[$ vers $\left]-\infty,2+\frac{1}{e}\right[$. Or, $0 \in \left]-\infty,2+\frac{1}{e}\right[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution
- sur $[1,+\infty[$. g est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ vers $\left]2,2+\frac{1}{e}\right]$. Or, $0 \notin \left]2,2+\frac{1}{e}\right]$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1,+\infty[$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que α est compris entre -1 et $-0,5$. **(0,25 point)**

$g(-1) < 0$ et $g(-0,5) > 0$. Donc $-1 < \alpha < -0,5$

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 point)**

Sur$]-\infty,\alpha[$, $g(x) < 0$ et Sur$]\alpha,+\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B (04,75 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{2x} + (x-1)e^{x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 +0,25 point)**

$\lim\limits_{-\infty} f = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C)

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ · **(0,5 point)**

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

c) Etudier la branche infinie de (C) en $+\infty$ · **(0,5 point)**

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)e^{2x}$ où f' est la dérivée de f. **(1 point)**

Simple vérification

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0,5 point)**

Tableau

4. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2+2\alpha+4}{4}$ · **(0,5 point)**

On a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 + \alpha e^{-\alpha} = 0$

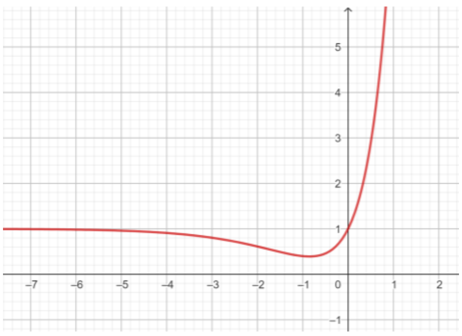
$\Leftrightarrow 2 + \alpha e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow e^{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}$

Ainsi : $f(\alpha) = 1 + e^{2\alpha} + (\alpha - 1)e^{\alpha}$

En remplaçant e^{α} par $-\frac{\alpha}{2}$, on obtient : $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2+2\alpha+4}{4}$ ·

5. Tracer soigneusement (C). (*on prendra* $\alpha \approx -0,7$). **(01 point)**



PARTIE C (02,5 points)

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 (x-1)e^x\,dx$. **(01 point)**

$$I = 2 - e$$

2. Calculer alors en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$. **(01,5 point)**

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx \times 4\ \mathrm{cm}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 (1 + e^{2x} + (x-1)e^x)\,dx \times 4\ \mathrm{cm}^2 \\
&= \left[\int_0^1 (1 + e^{2x})\,dx\ + \int_0^1 (x-1)e^x\,dx\right] \times 4\ \mathrm{cm}^2 \\
&= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}\right) + 2 - e\right] \times 4\ \mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$