MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 **(04,5 points)**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points suivants :

$A(1,0,0)$, $B\ (0,2,0)$ et $C\ (0,0,3)$.

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. **(01 pt)**

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(6,3,2)$$

b) Justifier alors que les points A, B et C déterminent un plan $(\mathcal{P})$. **(0,5 pt)**

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaire. Donc les points A, B et C déterminent un plan $(\mathcal{P})$.

c) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$. **(0,5 pt)**

$$(\mathcal{P}):\ 6x+3y+2z-6=0$$

2. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$

On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.

a) Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites Δ et Δ'. **(02×0,5 pt)**

$I\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

$$\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\\ z=t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}\qquad\text{et}\qquad\Delta':\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=t'\\ z=\frac{3}{2}\end{cases},\quad t'\in\mathbb{R}$$

b) Soit Ω le point d'intersection de Δ et Δ'. Déterminer les coordonnées de Ω. **(0,5 pt)**

$$\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$$

c) Calculer la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$. **(01 pt)**

$$d(\Omega,(\mathcal{P}))=\frac{\left|6\times\frac{1}{2}+3\times1+2\times\frac{3}{2}-6\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}$$

EXERCICE 2 **(05,5 points)**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):\ \mathbf{z^2-(3-i)z+4=0}$.

a) Résoudre (E). On écrira les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique où z_1 est la solution dont la partie imaginaire est strictement positive. **(01 pt)**

$S=\{z_1\,,z_2\}$ où $z_1=1+i,\ z_2=2-2i$

b) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique. **(01 pt)**

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ et $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ une autre équation $(E'):\ 3z^3-(9-i)z^2+(14+6i)z-8i=0$.

a) Montrer (E') admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera. On la notera z_0 · **(0,75 pt)**

$$z_0=\frac{2}{3}i$$

b) Résoudre alors (E'). **(0,75 pt)**

$$S=\left\{1+i,2-2i\ \frac{2}{3}i\right\}$$

3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2-2i$ et $\frac{2}{3}i$ ·

On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

a) Déterminer le module et l'argument principal de Z puis les interpréter géométriquement. **(01,5 pt)**

$Z = 3i$, donc $|Z| = 3$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$|Z| = 3 \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = 3$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) Déterminer alors la nature exacte du triangle ABC. **(0,5 pt)**

Le triangle ABC est rectangle en A.

<u>PROBLEME</u> **(10 points)**

<u>PARTIE A</u> **(03 points)**

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$ ·

$\lim_{0} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$ **(02×0,5 pt)**

2. Soit g' la dérivée de g.

a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x}$ · **(0,5 pt)**

Simple vérification

b) Dresser alors le tableau de variations de g. **(0,75 pt)**

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur$]0,+\infty[$.

Tableau de variations

3. Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$. **(0,25 pt+0,5 pt)**

$g(1) = 0$

Sur $]0,1[$, $g(x) < 0$ et sur $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$

<u>PARTIE B</u> **(05,75 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$ ·

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 3 cm).

1. Déterminer la limite de f en 0 puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 pt+0,25pt)**

$\lim_{0} f = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote.

On pourra remarquer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ · **(0,5 pt)**

$\lim_{+\infty} f = +\infty$

b) Etudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$ · **(0,5 pt)**

$\lim_{+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ et $\lim_{+\infty}(f(x) - x) = +\infty$ ·

La courbe (C_f) admet une branche parabolique d direction la droite d'équation $y = x$.

3. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **(0,75pt)**

Simple vérification

b) En utilisant les résultats de la partie A, dresser le tableau de variations de f. **(0,75pt)**

Tableau de variations

4. a) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et de la droite $\Delta : y = x$. **(0,75pt)**

$$f(x) = x \Leftrightarrow \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

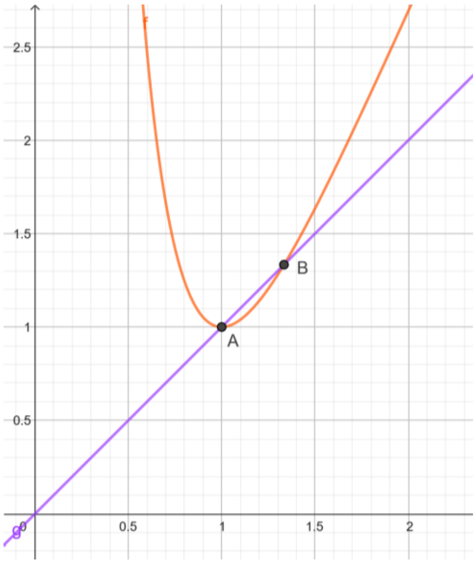
Les points d'intersection sont : $A(1,1)$ et $B\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

b) Etudier la position relative de (C_f) et Δ · **(0,75pt)**

$$f(x) - x = \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x$$

- Sur $]0,1[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$, (C_f) est au-dessus de Δ ;
- Sur $\left]1, \frac{4}{3}\right[$, (C_f) est en dessous de Δ.

c) Tracer soigneusement (C_f) et Δ, **(01pt)**



<u>PARTIE C</u> **(01,25 point)**

1. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = x\ln x - x$. **(0,25pt)**
Calculer $h'(x)$ où h' est la dérivée de h sur $]0, +\infty[$.

$$h'(x) = \ln x$$

2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par (C_f), Δ, $(D_1) : x = 1$ et $(D_2) : x = \frac{4}{3}$ ·
On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$ et une valeur approchée à 10^{-2} près. **(01pt)**

$$\mathcal{A} = \int_1^{\frac{4}{3}} |f(x) - x| \, dx \times 9 \text{ cm}^2$$

$$= \int_1^{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{x} - 3\right) \ln x \, dx \times 9 \text{ cm}^2$$

$$= \left(-\int_1^{\frac{4}{3}} 3 \ln x dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{4}{x} \ln x \, dx\right) \times 9 \text{ cm}^2$$

$$\left[-3(x\ln x - x) + 2\ln^2 x\right]_1^{\frac{4}{3}} \times 9 \text{ cm}^2$$