Série : F6 – Coef. 4
Durée : 4 heures
Epreuve du 1e groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (04,5 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E) : z^2 - 2(1 + i\sqrt{2})z + 2(-1 + 2i\sqrt{2}) = 0$.

a) Ecrire $(\sqrt{2} - i)^2$ sous forme algébrique. **(0,25 point)**

b) Résoudre (E). **(1 point)**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = (1 + \sqrt{2}) - i(1 - \sqrt{2})$, $z_B = 2 + 2i\sqrt{2}$ et $z_C = (1 - \sqrt{2}) + i(1 + \sqrt{2})$.

a) Placer les points A, B et C. **(0,5 point)**

b) Vérifier qu'on a : $z_C = iz_A$, puis en déduire la nature exacte du triangle OAC. **(0,25+0,5 point)**

3. a) Donner une écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$. **(0,5 point)**

b) Déterminer alors la nature exacte du triangle ABC. **(0,5 point)**

4. Montrer que les points A, B, C et O appartiennent à un même cercle dont on précisera son centre et son rayon. **(01 point)**

EXERCICE 2 (05,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, 3), B(0, 1, 4), C(-1, -3, 2), D(4, -2, 5)$ et le vecteur $\vec{n}(-2, 1, -1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan. **(0,5 point)**

2. a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). **(0,5 point)**

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **(0,5 point)**

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC). **(0,5 point)**

3. a) Justifier que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre. **(0,5 point)**

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). **(0,5 point)**

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. **(0,5 point)**

4. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\,k \\ y = -1 + k, \qquad k \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - k \end{cases}$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC). **(0,5 + 0,5 point)**

5. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC. **(01 point)**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A (02,75 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + xe^{-x}$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ · **(0,5 point)**

2. Etudier les variations de g. On dressera le tableau de variations. **(1 point)**

3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera α. **(0,5 point)**
b) Vérifier que α est compris entre -1 et $-0{,}5$. **(0,25 point)**

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 point)**

PARTIE B (04,75 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{2x} + (x-1)e^{x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 +0,25 point)**
b) Calculer la limite de f en $+\infty$ · **(0,5 point)**
c) Etudier la branche infinie de (C) en $+\infty$ · **(0,5 point)**

2. Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)e^{2x}$ où f' est la dérivée de f. **(1 point)**

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0,5 point)**

4. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2+2\alpha+4}{4}$ · **(0,5 point)**

5. Tracer soigneusement (C). (*on prendra* $\alpha \approx -0{,}7$). **(01 point)**

PARTIE C (02,5 points)

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 (x-1)e^{x}\,dx$. **(01 point)**

2. Calculer alors en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$. **(01,5 point)**