UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2025 A 25 N°1
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

CORRIGE

EXERCICE 1 (4,5 points)

Pour préparer les tests de sélection aux Jeux Olympiques de la Jeunesse de Dakar 2026, les athlètes disposent de deux stades A et B pour les entrainements.

Partie I (2,25 points)

Un athlète doit s'entrainer deux jours consécutifs.

- Le premier jour, la probabilité qu'il choisisse le stade A est égale à α .
- Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse un stade différent de celui fréquenté la veille est 0,8 .

Pour $j \in \{1, 2\}$, on note les évènements suivants ainsi :

A_j : « l'athlète choisit le stade A le jième jour » ;

B_j : « l'athlète choisit le stade B le jième jour ».

1. Déterminer la valeur de α pour que les évènements A_1 et A_2 aient la même probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\alpha = 0,5}$.

On a :

$P(A_1) = \alpha$; $P(B_1) = 1 - \alpha$; $P(B_2/A_1) = 0{,}8$, $P(A_2/A_1) = 0{,}2$; $P(A_2/B_1) = 0{,}8$ et $P(B_2/B_1) = 0{,}2$. **0,25 pt**

Or,

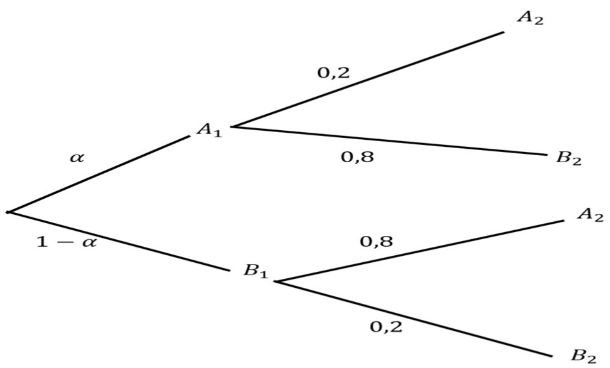
$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1) \\ &= P(A_2/A_1) \times P(A_1) + P(A_2/B_1) \times P(B_1) \\ &= 0{,}2 \times \alpha + 0{,}8 \times (1 - \alpha) \\ &= -0{,}6\alpha + 0{,}8 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{P(A_2) = -0,6\alpha + 0,8}$ **0,5 pt**

Ainsi, $P(A_1) = P(A_2) \Leftrightarrow \alpha = -0{,}6\alpha + 0{,}8$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 0,5}$ **0,25 pt**

Autre méthode



0,5 pt

$$P(A_2) = 0{,}2 \times \alpha + 0{,}8 \times (1-\alpha)$$
$$= -0{,}6\alpha + 0{,}8$$

$\boldsymbol{P(A_2) == -0,6\alpha + 0,8}$ **0,25 pt**

Ainsi, $P(A_1) = P(A_2) \Leftrightarrow \alpha = -0{,}6\alpha + 0{,}8$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 0,5}$ **0,25 pt**

2. Calculer la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

Soit p cette probabilité.

$p = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2,$

$\boldsymbol{p = 0,2}$ **0,5 pt**

3. Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B. Quelle est la probabilité qu'il se soit entrainé au même stade la veille ?

La probabilité demandée est la probabilité sachant B_2 de B_1 ·

$p_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}2}{0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}2} = 0{,}2.$ **0,75 pt**

Partie II (2,25 points)

Au premier jour, on a n athlètes $(n \geq 3)$ qui doivent s'entrainer. Chacun d'entre eux choisit, au hasard et indépendamment des choix des autres, l'un des deux stades où il doit s'entrainer.

On suppose que les deux stades ne contiennent aucun athlète au départ.

On dit qu'un athlète est heureux s'il se trouve seul dans un stade.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux ?

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il y a au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes.

La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle. **0,5 pt**

2. Soit p_n la probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes.

a) Montrer que pour tout entier naturel n ($n \geq 3$), on a : $p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade pour est une épreuve de Bernouilli dont la probabilité du succès (le stade A) est 0,5.

Cette épreuve étant effectué n fois de suite (n athlètes) et de manières indépendantes, on a un schéma de Bernoulli.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade A et $n-1$ athlètes sont le stade B : 1 succès
- Un athlète se présente dans le stade B et $n-1$ athlètes sont le stade A : $n-1$ succès

la probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes est

$$p_n = C_n^1(0{,}5)^1(1-0{,}5)^{n-1} + C_n^{n-1}(0{,}5)^{n-1}(1-0{,}5)^1 = 2n(0{,}5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

$\boldsymbol{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}}$. **0,75 pt**

b) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 3}$.

$$\boldsymbol{p_{n+1} - p_n = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2^n} - \frac{2n}{2^n} = \frac{1-n}{2^n}}.$$

$\boldsymbol{\forall n \geq 3, p_{n+1} - p_n < 0}$.

La suite (p_n) est strictement décroissante.

On a : $\boldsymbol{p_n \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{2}{\ln 2} \times \frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}}$.

Donc, la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ converge vers 0

c) Calculer p_{10} puis déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à **0,005.**

On a : $\boldsymbol{p_{10} = \frac{5}{256} \approx 0{,}019 > 0{,}005}$ **;**

La suite (p_n) étant strictement décroissante, on va chercher la plus grande valeur de n supérieur à 10 telles que $\boldsymbol{p_n}$ **reste** supérieur à **0,005**

$\boldsymbol{p_{11} = \frac{11}{1024} \approx 0{,}01 > 0{,}005}$; $\boldsymbol{p_{12} = \frac{3}{512} \approx 0{,}0059 > 0{,}005}$; $\boldsymbol{p_{13} = \frac{13}{4096} \approx 0{,}0031 < 0{,}005}$.

La plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à **0,005** est **12.** **0,5 pt**

EXERCICE 2 (4,25 points)

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace.

On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$.

1. On suppose que (Δ_1) **et** (Δ_2) **sont perpendiculaires en un point noté** $\boldsymbol{O}$.

On adoptera les notations suivantes :

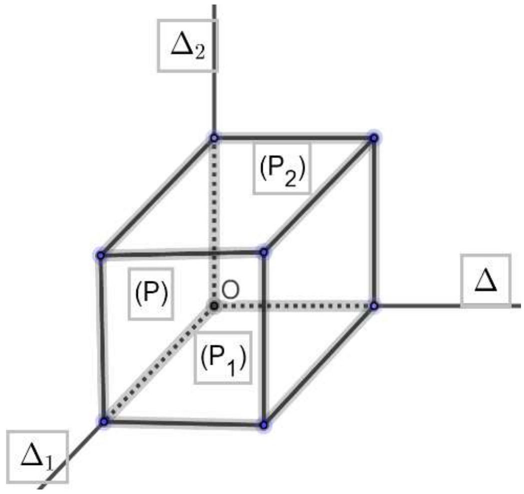
- Le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2) est noté (P)
- La droite perpendiculaire en O au plan (P) est notée (Δ).

➢ Le plan contenant (Δ) et (Δ_1) est noté (P_1).

➢ Le plan contenant (Δ) et t (Δ_2) est noté (P_2).

➢ Les réflexions par rapport aux plans (P), (P_1) et (P_2) sont respectivement notées S_P, S_{P_1} et S_{P_2}.

a) Faire une figure en faisant apparaitre clairement le point O, les plans (P), (P_1) et (P_2) ainsi que les droites (Δ), (Δ_1) et (Δ_2).



0,75 pt

b) Déterminer $S_P\ o\ S_{P_1}$ et $S_{P_2}\ o\ S_P$.

➢ La transformation $S_P\ o\ S_{P_1}$ est la rotation d'axe $(P)\ \cap (P_1) = \Delta_1$ et d'angle 2×[l'angle formé par (P) et (P_1)] $= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$. C'est donc **le demi-tour d'axe Δ_1 c'est à dire R_1** . **0,5 pt**

➢ La transformation $S_{P_2}\ o\ S_P$ est la rotation d'axe $(P)\ \cap (P_2) = \Delta_2$ et d'angle 2×[l'angle formé par (P) et (P_2)] $= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$. C'est donc **le demi-tour d'axe Δ_2 c'est à dire R_2** . **0,5 pt**

c) En déduire que $R_2 o R_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

$R_2 \circ R_1 = (S_{P_2}\ o\ S_P) \circ (S_P\ o\ S_{P_1}) = S_{P_2} o\ S_{P_1}$.

Or, $S_{P_2} o\ S_{P_1}$ est la rotation d'axe $(P_1) \cap (P_2) = \Delta$ et d'angle 2×[l'angle formé par (P_1) et (P_2)] $=$

$2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

C'est donc **le demi-tour d'axe Δ.** **0,5 pt**

d) Prouver alors que $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$. **0,5 pt**

On peut aussi écrire : $R_1 = S_{P_1}\ o\ S_P$. On a alors :

$R_1 \circ R_2 = \left(S_{P_1}\ o\ S_P\right) \circ \left(S_P\ o\ S_{P_2}\right) = S_{P_1} o\ S_{P_2}$

Or, $S_{P_1} o\ S_{P_2}$ est aussi est la rotation d'axe $(P_1)\ \cap (P_2) = \Delta$ et d'angle 2×[l'angle formé par (P_1) et (P_2)] $= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

C'est donc **le demi-tour d'axe Δ.** .

Finalement, $\boldsymbol{R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1}$.

2. Réciproquement, on suppose que $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$.

Soit A un point de (Δ_1) qui n'appartient pas à (Δ_2) et B l'image de A par R_2.

a) Montrer que la droite (AB) et la droite (Δ_2) sont perpendiculaires.

Soit (Q) le plan passant par A et orthogonal à (Δ_2) et soit I le point d'intersection de (Q) et (Δ_2).

Dire que le point B est l'image du point A par R_2 signifie que B est l'image du point A par la restriction de R_2 à (Q) qui est la symétrie centrale de centre I.
On a $(AB) \subset (Q)$, donc (Δ_2) est orthogonal à (AB).
De plus, A, I et B sont alignés. Donc $I \in (\Delta_2) \cap (AB)$.
Ainsi, la droite $(\boldsymbol{AB})$ **et la droite** Δ_2 **sont perpendiculaires en** $\boldsymbol{I}$. **0,5pt**

b) En utilisant la relation $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$, prouver que $B = R_1(B)$.

$\boldsymbol{R_1(B) = R_1(R_2(A)) = R_2(R_1(A)) = R_2(A) = B}$. **0,5 pt**

c) En déduire que(Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

On a :

- $R_1(B) = B$; donc $B \in (\Delta_1)$.
- $A \in \Delta_1$
- $A \neq B$ car si $A = B$, on aurait $\boldsymbol{R_2(A) = A}$ **; ce qui signifierait que** $\boldsymbol{A} \in (\Delta_2)$

On en déduit que $(\boldsymbol{AB}) = (\Delta_1)$

D'après 2.a), la droite (AB) et la droite (Δ_2) sont perpendiculaires.

On en déduit que $(\boldsymbol{\Delta_1})$ **et** $(\boldsymbol{\Delta_2})$ **sont perpendiculaires**. **0,25pt**

3. En utilisant ce qui précède, énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que $R_1 o R_2 = R_2 o R_1$.

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace, R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

$$R_1 o R_2 = R_2 o R_1 \Leftrightarrow (\Delta_1) \perp (\Delta_2) \cdot$$

0,25 pt

PROBLEME (11 points)

On considère le plan complexe $\mathbb{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

PARTIE A (2 points)

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $F_{a,b}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a\,\overline{z} + ib$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

a) Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = b - ay \end{cases} \cdot$$ **0,25 pt**

b) Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'ensemble des points invariants par $F_{a,b}$.

$$F_{a,b}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax \\ y = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) = 0 \\ y(1+a) = b \end{cases}.$$

- Si $a = 1$ alors $y = \frac{1}{2}b$ et x peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

  L'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}b$.

- Si $a \neq 1$ alors $x = 0$
  - ✓ Si $a = -1$ et $b \neq 0$,

  L'ensemble des points invariants est

  - ✓ Si $a = -1$ et $b = 0$, y peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

    L'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation $x = 0$.

  - ✓ **Si** $a \neq -1$, alors $y = \frac{b}{1+a}$.

    L'ensemble des points invariants est $\left\{\Omega\left(\frac{ib}{1+a}\right)\right\}$.

0,5 pt

2. On suppose $|a| \neq 1$.

Montrer que $F_{a,b} = S_\Delta \, o \, h$, où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ et h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\frac{ib}{1+a}$ et de rapport a.

Déterminons les expressions analytiques de S_Δ et de h.

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$

- Expression analytique de S_Δ

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \\ \text{Le milieu } I \text{ de } [MM'] \text{ appartient à } \Delta. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' + y = 2\left(\frac{b}{1+a}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + \frac{2b}{1+a} \end{cases}$$

L'expression analytique de S_Δ est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + \frac{2b}{1+a} \end{cases}$ **0,25 pt**

- Expression analytique de h

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = a\,\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax \\ y' = ay + \frac{b}{1+a}(1-a) \end{cases}$$

0,25 pt

- La composée $S_\Delta\ o\ h$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = ax \\ y' = -\left(ay + \frac{b}{1+a}(1-a)\right) + \frac{2b}{1+a} \end{cases}$

$$S_\Delta\ o\ h : \begin{cases} x' = ax \\ y' = -ay + b \end{cases}$$

Finalement $S_\Delta\ o\ h$ a pour écriture complexe $z' = x' + iy' = ax - aiy + ib = a(x - iy) + ib = a\bar{z} + ib$. Donc $S_\Delta\ o\ h = F_{a,b}$

$F_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ et de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $Z_\Omega = \frac{ib}{1+a}$ et de rapport a. **0,25 pt**

3. Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $G_{c,d}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui, au point N d'affixe z, fait correspondre le point N' d'affixe z' tel que : $z' = cz + id$.

Déterminer, suivant les valeurs de c et d, la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $G_{c,d}$.

- Si $c = 1$, $G_{c,d}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{W}$ d'affixe id. **0,25 pt**
- Si $c \neq 1$, $G_{c,d}$ est l'homothétie de centre Π d'affixe $\frac{id}{1-c}$ et de rapport c . **0,25 pt**

PARTIE B (3,25 points)

1. Dans cette question on suppose que $|a| \neq 1$.

On définit la suite de points $(M_n)_{n\geq 1}$ par : $\begin{cases} M_1 \text{ est le point d'affixe } u_1 = a + ib \\ \forall n \geq 1, M_{n+1} = F_{a,b}(M_n) \end{cases}$.

a) Déterminer l'affixe u_2 du point M_2 ·

$M_2 = F_{a,b}(M_1) \Leftrightarrow u_2 = a\overline{u_1} + ib$

$\Leftrightarrow u_2 = a^2 + ib(1-a)$

Donc $u_2 = a\overline{u_1} + ib = a^2 + ib(1-a)$ **0,25 pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, M_n a pour affixe : **0,75 pt**

$$u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right).$$

On va faire une demonstration par recurrence

- La formule est vraie pour $n = 1$.

  En effet, $u_1 = a + ib = a^1 + ib\left(\frac{1-(-a)^1}{1+a}\right)$
- Supposons que la formule est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire que M_n a pour affixe : $u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right)$ et montrons que M_{n+1} a pour affixe : $u_{n+1} = a^{n+1} + ib\left(\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}\right)$

$$M_{n+1} = F_{a,b}(M_n) \Leftrightarrow u_{n+1} = a\overline{u_n} + ib$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = a\left(a^n - ib\left(\frac{1 - (-a)^n}{1 + a}\right)\right) + ib$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = a^{n+1} + ib\left(\frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a}\right)$$

Conclusion : $\boldsymbol{M_n}$ **a pour affixe** $\boldsymbol{u_n = a^n + ib\left(\frac{1 - (-a)^n}{1 + a}\right)}$. **0,75 pt**

c) Soit (D_1) la droite passant par les points $\Omega\left(\frac{ib}{1+ a}\right)$ et M_1 et soit (D_2) son image par $F_{a,b}$.

i) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_2).

La droite (D_1) passe par $\Omega\left(0, \frac{b}{1+ a}\right)$ et $M_1(a + ib)$, donc $\boldsymbol{(D_1): y = \frac{b}{1 + a}(x + 1)}$.

$$M'(x', y') \in (D_2) \Leftrightarrow \exists M(x, y) \in (D_1) \text{ tel que } M' = F_{a,b}(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \begin{cases} \boldsymbol{y = \dfrac{b}{1 + a}(x + 1)} \\ x' = ax \\ y' = -ay + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \begin{cases} \boldsymbol{y' = \dfrac{b}{1 + a}(-x' + 1)} \\ x' = ax \\ y' = -ay + b \end{cases}$$

On en déduit que $\boldsymbol{(D_2)}$ a pour équation $\boldsymbol{y' = \frac{b}{1 + a}(-x' + 1)}$ ou, plus simplement

$\boldsymbol{(D_2) : y = \frac{b}{1 + a}(-x + 1).}$ **0,25 pt**

ii) Montrer (D_1) est aussi l'image de (D_2) par $F_{a,b}$.

Soit (D_3) l'image de (D_2) par $F_{a,b}$

$$M'(x', y') \in (D_3) \Leftrightarrow \exists M(x, y) \in (D_2) \text{ tel que } M' = F_{a,b}(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \begin{cases} \boldsymbol{y = \dfrac{b}{1 + a}(-x + 1)} \\ x' = ax \\ y' = -ay + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \begin{cases} \boldsymbol{y' = \dfrac{b}{1 + a}(x' + 1)} \\ x' = ax \\ y' = -ay + b \end{cases}$$

On en déduit que $\boldsymbol{(D_3)}$ a pour équation $\boldsymbol{y' = \frac{b}{1 + a}(x' + 1)}$ ou, plus simplement

$\boldsymbol{(D_3) : y = \frac{b}{1 + a}(-x + 1).}$

Conclusion : $\boldsymbol{(D_3) = (D_1)}$ **0,25 pt**

iii) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, le point M_{2n} appartient à (D_2) et le point M_{2n+1} appartient à (D_1).

Soit n un entier naturel non nul.

- Le point $\boldsymbol{M_{2n}}$ **a pour affixe** $\boldsymbol{u_{2n} = a^{2n} + ib\left(\frac{1-(-a)^{2n}}{1+a}\right)}$ c'est-à-dire à pour coordonnées $\left(\boldsymbol{a^{2n}}, \boldsymbol{b\left(\frac{1-(-a)^{2n}}{1+a}\right)}\right)$.

  M_{2n} appartient à (D_2) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de (D_2)

  On a : $\boldsymbol{\frac{b}{1+a}(-a^{2n}+1) = b\left(\frac{1-a^{2n}}{1+a}\right) = b\left(\frac{1-(-a)^{2n}}{1+a}\right)}$

  D'où $\boldsymbol{M_{2n}}$ **appartient à** $\boldsymbol{(D_2)}$. **0,25 pt**

- Le point $\boldsymbol{M_{2n+1}}$ **a pour affixe** $\boldsymbol{u_{2n+1} = a^{2n+1} + ib\left(\frac{1-(-a)^{2n+1}}{1+a}\right)}$ c'est-à-dire à pour coordonnées $\left(\boldsymbol{a^{2n+1}}, \boldsymbol{b\left(\frac{1-(-a)^{2n+1}}{1+a}\right)}\right)$;

  M_{2n+1} appartient à (D_1) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de (D_1)

  On a $\boldsymbol{\frac{b}{1+a}(a^{2n+1}+1) = b\left(\frac{1+a^{2n+1}}{1+a}\right) = b\left(\frac{1-(-a)^{2n+1}}{1+a}\right)}$

  d'où $\boldsymbol{M_{2n+1}}$ **appartient à** $\boldsymbol{(D_1)}$. **0,25 pt**

2. Dans cette question on suppose que $|c| \neq 1$.

On définit la suite de points $(N_n)_{n\geq 1}$ par : $\begin{cases} N_1 \text{ est le point d'affixe } v_1 = c + id \\ \forall n \geq 1, N_{n+1} = G_{c,d}(N_n) \end{cases}$.

a) Déterminer l'affixe v_2 du point N_2.

$G_{c,d}: z' = cz + id \quad G_{c,d}: \begin{cases} x' = cx \\ y' = d + cy \end{cases}$

$$N_2 = G_{c,d}(N_1) \Leftrightarrow \boldsymbol{v_2 = cv_1 + id}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v_2 = c^2 + id(1+c)}$$

0,25 pt

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, le point N_n a pour affixe :

$$v_n = c^n + id\left(\frac{c^n - 1}{c - 1}\right).$$

- N_1 a pour affixe $v_1 = c + id$, donc vrai au premier rang.
- Supposons que N_n a pour affixe $v_n = c^n + id\left(\frac{c^n-1}{c-1}\right)$.
- Démontrons que $N_{n+1} = G_{c,d}(N_n)$ a pour affixe $v_{n+1} = c^{n+1} + id\left(\frac{c^{n+1}-1}{c-1}\right)$

Or $N_{n+1} = G_{c,d}(N_n) \Longrightarrow v_{n+1} = cv_n + id = c\left(c^n + id\left(\frac{c^n-1}{c-1}\right)\right) + id = c^{n+1} + id\left(\frac{c^{n+1}-c}{c-1}\right) + id = c^{n+1} + id\left(\frac{c^{n+1}-1}{c-1}\right)$ donc vrai au rang $n+1$.

Conclusion : $\boldsymbol{N_n}$ **a pour affixe** $\boldsymbol{v_n = c^n + id\left(\frac{c^n-1}{c-1}\right)}$. **0,5 pt**

c) Montrer que tous les points N_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ appartiennent à la droite (Δ) passant par B et N_1 où B est le point d'affixe $\frac{id}{1-c}$ ·

$B\left(\frac{id}{1-c}\right)$ et $N_1(c+id)$

(Δ): $\boldsymbol{y = \frac{d}{1-c}(-x+1)}$

$G_{c,d}: \begin{cases} x' = cx \\ y' = d + cy \end{cases}$ et $v_n = c^n + id\left(\frac{c^n - 1}{c-1}\right)$

On a $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{1-c}}(\boldsymbol{-c^n + 1}) = d\left(\frac{c^n-1}{c-1}\right) \Longrightarrow$ les coordonnées de N_n vérifient l'équation de (Δ). **0,5 pt**

PARTIE C (3,25 pts)

On considère la famille de courbes $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_n, n \geq 1\}$ définie de la manière suivante :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ de la fonction Φ_1 définie par : $\Phi_1(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 2$.
- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathcal{C}_{n+1} = G_{2,1}(\mathcal{C}_n)$ où $G_{2,1}$ est l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ définie dans la **question 3. de la partie A** avec $c = 2$ et $d = 1$.

1. **a)** Etudier les variations de Φ_1 puis établir le tableau de variations de Φ_1 ·

i) Etudions les variations de Φ_1.

Φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\boldsymbol{\Phi'_1(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$. **0,25 pt**

Sur $]-\infty; \mathbf{0}[\, \cup\, [\mathbf{1}; +\infty[$, $\boldsymbol{\Phi'_1 \geq 0}$**, donc** $\boldsymbol{\Phi_1}$ **est croissante sur** $]-\infty; \mathbf{0}[$ **et sur** $[\mathbf{1}; +\infty[$

Sur $]\mathbf{0}; \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{\Phi'_1 \leq 0}$ **, donc** $\boldsymbol{\Phi_1}$ **est croissante**. **0,25 pt**

ii) Dressons son tableau de variations.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi_1(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \Phi_1(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi_1(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_1(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\Phi'_1(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
Φ_1	$-\infty$	$\nearrow$	-2 || $+\infty$	$\searrow$	$e-2$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 pt

b) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_1$.

Soit $y = x - 1$, $\Phi_1(x) - y = x\left(e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right) - 1$ en posant $t = \frac{1}{x}$, on obtient

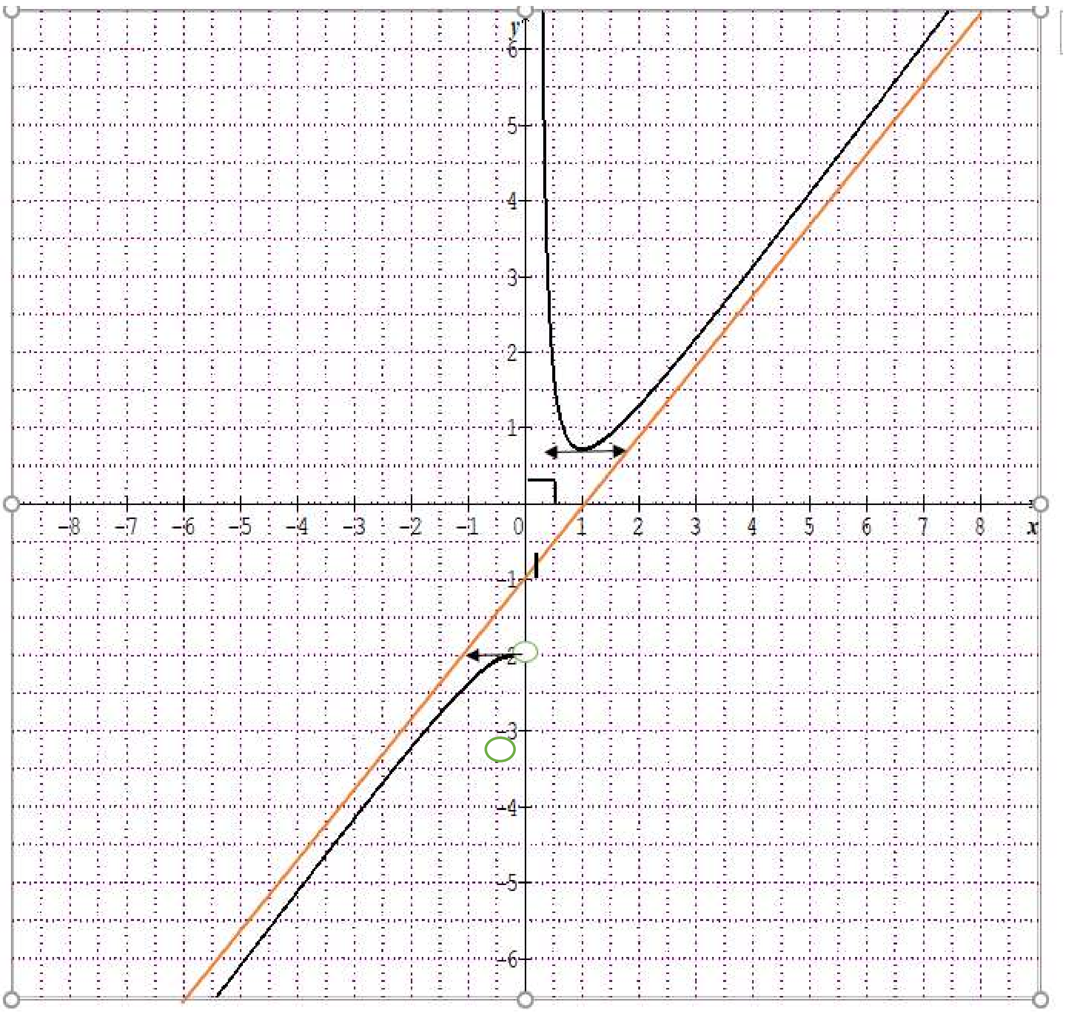
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} - 1 = 1 - 1 = 0.$

Donc la droite $\boldsymbol{y = x - 1}$ **est asymptote à** $\mathbf{C_1}$ **en** $-\infty$ **et en** $+\infty$. **0,25 pt**

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$.

✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi_1(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à C_1 à droite en 0.

✓ $\lim\limits_{x \to 0^-} \Phi'_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{e}^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{0}$ **donc** C_1 admet au point de coordonnées $(0\,, -2)$ une demi-tangente horizontale.



0,5 pt

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Φ_n la fonction numérique à variable réelle dont la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ est $\mathcal{C}_n$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ $\Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1.$ **0,75 pt**

$G_{2,1}$: $z' = 2z + i$, $G_{2,1}$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre Π d'affixe $-i$.

$G_{2,1} : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 1 + 2y \end{cases}$, $C_{n+1} = G_{2,1}(C_n)$

- Si $n = 1$, $\Phi_1 = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 2$, donc vrai au premier rang
- Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1.$
- Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{n+1}(x) = xe^{\left(\frac{2^{n}}{x}\right)} - 2^{n} - 1.$

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1$

Or $C_{n+1} = G_{2,1}(C_n)$ avec $G_{2,1}\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 1 + 2y \end{cases}$

$$y' = 1 + 2\left(\frac{1}{2}x'e^{\left(\frac{2^{n-1}}{x'}\right)\times 2} - 2^{n-1} - 1\right) = 1 + x'e^{\left(\frac{2^{n}}{x'}\right)} - 2\times 2^{n-1} - 2 = x'e^{\frac{2^n}{x'}} - 2^n - 1$$

$y' = x'e^{\left(\frac{2^{n}}{x'}\right)} - 2^n - 1$, donc vrai au rang $n + 1$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1}$. **0,75 pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$.

$\Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1$

$\Phi_n(x) - y = x\left(e^{\frac{2^{n-1}}{x}} - 1\right) - 2^{n-1}$ en posant $t = \frac{2^{n-1}}{x}$

$\lim\limits_{t \to 0} 2^{n-1} \times \frac{e^t - 1}{t} - 2^{n-1} = 2^{n-1} - 2^{n-1} = 0$, par suite toutes les courbes C_n ont la même asymptote : la droite d'équation : $\boldsymbol{y = x - 1}$**.** **0,5 pt**

c) **i)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique point S_n où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^*$, $\Phi'_n(x) = \left(1 - \frac{2^{n-1}}{x}\right)e^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)}$

$\Phi_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2^{n-1}}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2^{n-1}$ et $\Phi_n(2^{n-1}) = 2^{n-1}(e - 1) - 1$

Par conséquent S_n a pour coordonnées $(2^{n-1}\,;\ 2^{n-1}(e - 1) - 1\,)$

ii) Montrer que pout tout entier naturel n non nul, les points S_n, S_{n+1} et $B(0\,, -1)$ sont alignés.

Calculons $det\left(\overrightarrow{BS_n}, \overrightarrow{BS_{n+1}}\right)$.

$det\left(\overrightarrow{BS_n}, \overrightarrow{BS_{n+1}}\right) = \begin{vmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1}(e-1) \\ 2^n & 2^n(e-1) \end{vmatrix} = 0$ par suite les points B, S_n et S_{n+1} sont alignés.

Finalement les points S_n sont alignés avec $B(0; -1)$. **0,25 pt**

PARTIE D (2,5 points)

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction numérique à variable réelle h_n définie par :

$$h_n(x) = x - 1 + 4^{n-1}\left(\frac{e - 2}{x}\right).$$

On note $\mathcal{H}_n$ la courbe représentative de h_n dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. **a)** Etudier les variations de h_1 puis dresser son tableau de variations.

h_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h'_1(x) = 1 - \frac{e-2}{x^2}$

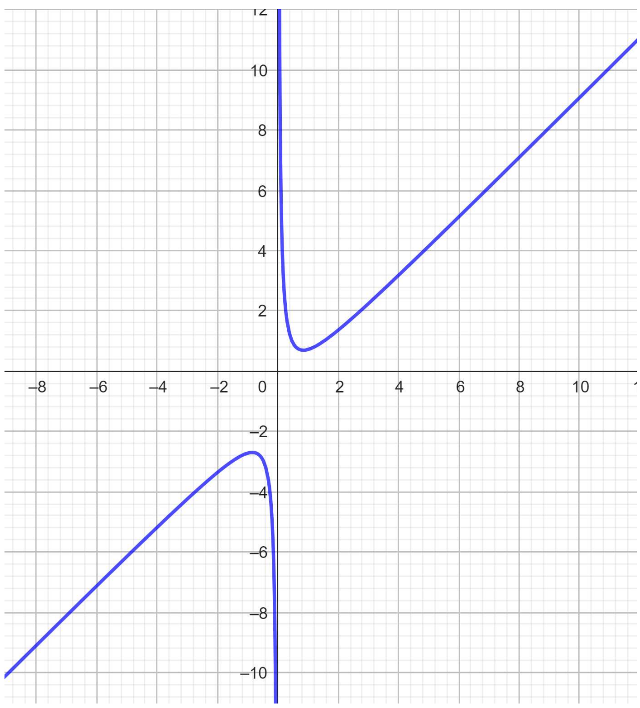
$h'_1(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty; -\sqrt{e-2}\right] \cup \left[\sqrt{e-2}\ ;\ +\infty\right[$, h_1 est croissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{e-2}\right]$ et sur $\left[\sqrt{e-2}\ ;\ +\infty\right[$

$h'_1(x) \leq 0$ sur $\left[-\sqrt{e-2}; 0\right[\cup \left]0; \sqrt{e-2}\right]$, h_1 est décroissante sur $\left[-\sqrt{e-2}; 0\right[$ et sur $\left]0; \sqrt{e-2}\right]$

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-2}$		0		$\sqrt{e-2}$		$+\infty$
$h'_1(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
h_1	$-\infty$	↗	$h_1(-\sqrt{e-2})$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$h_1(\sqrt{e-2})$	↗	$+\infty$

0,5 pt

b) Tracer $\mathcal{H}_1$.



0,5 pt

c) Calculer, en unité de volume, le volume du solide obtenu par révolution autour de l'axe des abscisses, de la partie de $\mathcal{H}_1$ comprise entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Soit $\mathcal{V}$ ce volume

$$\mathcal{V} = \int_1^2 \pi(h_1(x))^2 dx \times uv$$

Or, $(h_1(x))^2 = (x-1)^2 + 2(e-2)\left(\frac{x-1}{x}\right) + \left(\frac{e-2}{x}\right)^2$

La fonction K définie par :

$$K(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2(e-2)(x - \ln x) - \left(\frac{e-2}{x}\right)$$

est une primitive de $(h_1)^2$sur $[1, 2]$.

Par conséquent,

$$\mathcal{V} = \pi\big(K(2) - K(1)\big) \times uv$$

Or, $K(2) = -\frac{20}{3} + \frac{7e}{2} - 2e\ln 2 + 4\ln 2$ et $K(1) = e - 2$.

Donc,

$$\mathcal{V} = \pi\left(-\frac{14}{3} + \frac{5e}{2} - 2e\ln 2 + \ln 2\right) \times uv$$

0,5 pt

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, H_{n+1} est l'image de H_n par $G_{2,1}$.

$G_{2,1}$: $z' = 2z + i$, $G_{2,1}$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre Π d'affixe $-i$. $G_{2,1}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 1 + 2y \end{cases}$

On a $\mathrm{h}_n(x) = x - 1 + 4^{(n-1)}\left(\frac{e-2}{x}\right)$

Cherchons $G_{2,1}(\mathrm{H}_n)$ avec $G_{2,1}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 1 + 2y \end{cases}$

$y' = 1 + 2\left(\frac{1}{2}x' - 1 + 4^{(n-1)}2\left(\frac{e-2}{x'}\right)\right) = 1 + x' - 2 + 4(4)^{(n-1)}\left(\frac{e-2}{x'}\right)$,

$y' = x - 1 + 4^n\left(\frac{e-2}{x'}\right) = \mathrm{h}_{n+1}(x)$.

$\mathbf{h}_{n+1}(x) = G_{2,1}(\mathrm{H}_n)$. **0,5 pt**

3. Pour tout entier naturel n non nul, On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine plan délimité par les courbes d'équations respectives dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$: $y = h_n(x)$, $y = x - 1$, $x = 2^{n-1}$ et $x = 2^n$.

Montrer que $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

$y = h_n(x)$, $y = x - 1$, $x = 2^{n-1}$ et $x = 2^n$.

$A_n = \int_{2^{n-1}}^{2^n} (h_n(x) - \mathrm{y})\, dx = 4^{(n-1)}(e-1)\int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{1}{x} dx$

$$A_n = 4^{(n-1)}(e-1)[nln2 - (n-1)ln2]$$

$$\boldsymbol{A_n = 4^{(n-1)}(e-1)\ln 2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons une relation entre A_n et A_{n+1}.

$A_n = 4^{(n-1)}(e-1)ln2$, $A_{n+1} = 4^n(e-1)ln2 = 4A_n$

$\boldsymbol{A_{n+1} = 4A_n}$.

La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $\mathcal{A}_1 = \boldsymbol{(e-1)\ln 2}$**.**

0,5 pt