

**M A T H E M A T I Q U E S**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. du 12.08.1988).

EXERCICE I (05 points)

Soit la fonction définie par $G(x) = 2x + \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

1/ a- Déterminer D_G ensemble de définition de G (01 point)

b) Calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ (01 point)

2) On pose $g(x) = 2 + \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x-1}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

Montrer que $g(x) = 2 - \frac{4}{(3x+1)(x-1)}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ (01 point)

3) Calculer : $I = \int_2^3 g(x) dx$ (02 points)

EXERCICE II (07 points)

1) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système de trois équations à trois inconnues suivant: (02,5 points)

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 \\ x + 3y - 4z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

2) Les solutions de ce système sont les trois premiers termes d'une suite numérique (U_n) décroissante.

a) Déterminer la nature de (U_n) . On précisera la raison et le premier terme U_1 . (01,5 points)

b) Exprimer U_n en fonction de n . (01 point)

c) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
Calculer S_n en fonction de n . (02 points)

EXERCICE III (08 points)

On se propose d'étudier la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

1) Montrer que $2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -2 + \frac{8}{e^x + 2}$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} \quad \text{(02 points)}$$

2) a) En utilisant l'une des expressions de $f(x)$ calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{(02 points)}$$

b) En utilisant l'une des expressions de f montrer que les droites :

(D_1) d'équation $y = x - 2$

et (D_2) d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe (C_f) de f (02 points)

3) Montrer que $f'(x) = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$ étudier son signe et en déduire le tableau de variation de f .

(02 points)