UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❑❑◆❑❑
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2024GS21NB0124
Durée : 2 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : 1,25 × 5 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la similitude plane directe f d'écriture complexe $z' = \frac{3}{2}(1-i)\,z + 4 - 2i$.

Proposition 1 : $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et de centre Ω d'affixe $-2-2i$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.
Soit Σ la surface d'équation $x = y^2 + z^2$.

Proposition 2 : La section de la surface Σ et du plan d'équation $z = \lambda$ où λ est un réel, est une hyperbole.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$,

Proposition 3 : La similitude plane directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point I d'affixe $1-i$ a pour écriture complexe $z' = (\sqrt{3}+i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

4) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les points $A(1\,,2\,,3)$, $B(0\,,1\,,4)$, $C(-1\,,-3\,,2)$ et $D(4\,,-2\,,5)$.

Proposition 4 : Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère un point A d'affixe a.
On note s la réflexion d'axe $(O,\vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

Proposition 5 : L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des réels.

EXERCICE 2 : (5,75 points)

1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 de chacun des nombres 2^{364} et 5^{143}. **1,5 pt**
2) Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n^2-4)$ est divisible par 3. **1,25 pt**
3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1[3]$. **1 pt**
4) Prouver que $4^{28}-1$ est divisible par 29. **1 pt**
5) Montrer que le nombre dont l'écriture en base 3 est 100100 est divisible par 3. **1 pt**

EXERCICE 3 : (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1) **a)** Etudier les variations de f. **1 pt**
b) En déduire le signe de f sur $[0\,,+\infty[$. **0,5 pt**
c) Montrer que (C) admet pour asymptote la droite (D) d'équation $y = x$. **0,5 pt**
d) Construire (C) et (D). **1,5 pt**

2) Soit I l'intégrale définie par $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x})\,dx$.
a) Donner une interprétation géométrique de I. **0,5 pt**
b) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1 + t) \leq t$. **1 pt**
c) En déduire que pour tout $x \in [0\,,+\infty[$, $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$. **1 pt**
d) Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}$. **1 pt**

3) On désigne par M et N deux points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).
On dit que M et N sont indiscernables lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables. **1 pt**